Pur technische Übungen zur Klausur 2 • 12.2

für Montag, 29. April 2019 • 2 Unterrichtsstunden

Geraden • Ebenen • Lagebeziehungen

Aufgabe 1. Gegeben seien der Punkt $P(3|0|-1)$, die Gerade g und die Ebene E:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad E : \begin{pmatrix}1\\-4\\4\end{pmatrix} \bullet \vec{x} = -8.$$

a) Prüfen Sie rechnerisch, ob P auf g oder auf E liegt.

b) Zeigen Sie (ohne Bezug auf das Folgende), dass g und E sich schneiden müssen. Berechnen Sie anschließend ihren Schnittpunkt.

c) Sei F die Ebene, die P und g enthält. Bestimmen Sie F in Normalenform und diskutieren Sie die Lage von E und F zueinander.

d) Ermitteln Sie den Schnittbereich zwischen E und F (eventuell leer).

e) Konstruieren Sie eine zu E parallele Ebene E', die den Punkt P enthält.

f) Diskutieren Sie die Lagebeziehung zwischen E' und g.

g) Geben Sie eine Gleichung an für eine zu g parallele Gerade h durch den Punkt $Q(7|3|5)$ und berechnen Sie eventuelle Schnittpunkte von h mit E, E' und F.

Lösungen

Aufgabe 1. a)

- P bei $\vec{x}$ eingesetzt ergibt in erster Komponente $r = 3$, was aber in dritter Komponente nicht stimmt, weshlab P nicht auf g liegt.
- In die E-Gleichung eingesetzt ergibt sich $\vec{n} \bullet \vec{p} = -1 \neq -8$, so dass P auch nicht auf E liegt.

b) Richtungsvektor $\vec{u}$ von g (hinter r) ist nicht senkrecht zum Normalenvektor $\vec{n}$ von E, da $\vec{u} \bullet \vec{n} = 2 + 4 + 4 = 10 \neq 0$ ist. Daher sind g und E nicht parallel, müssen sich also schneiden. Schnittpunkt S:

$$\begin{pmatrix}1\\-4\\4\end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right] = -8$$

ergibt durch Ausmultiplizieren $1 + r\cdot 10 = -8$, also $r = -9/10 = -0{,}9$ und dieses r in g eingesetzt ergibt $S = (-0{,}8|1{,}9|0{,}1)$.

c) Normalenvektor $\vec{n}_F$ von F aus Richtungsvektor $\vec{u}$ von g und Vektor $\overrightarrow{AP}$:

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} =: \vec{n}_F$$

und $d_F = \vec{n}_F \bullet \vec{a} = 3$, also F: $x + 2y = 3$ (in Koordinatenform). Die beiden Ebenen schneiden sich (in einer Geraden), da ja mindestes der Schnittpunkt S aus b) vorhanden ist, sie also nicht echt parallel sein können (wie auch die Normalenvektoren zeigen).

d) Gleichungssystem aus Koordinatengleichungen für E und F

$$\begin{aligned} x - 4y + 4z &= -8 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

ist direkt auflösbar, da in der z-Spalte schon „eliminiert“ ist: es ergibt sich in zweiter Zeile $x = 3 - 2y$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig sowie damit in erster Zeile $4z = -8 - x + 4y = -8 - 3 + 2y + 4y = -11 + 6y$, was sich zur Schnittgerade zusammensetzt:

$$g_S:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2y \\ y \\ -22/4 + 6/4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5{,}5 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

e) Für parallele Ebene E' selben Normalenvektor $\vec{n}$ nehmen und $d' = \vec{n} \bullet \vec{p} = -1$, also $E':\ x - 4y + 4z = -1$.

f) Da E und E' parallel sind und g „quer“ zu E lag, liegt diese Gerade g ebenso zu E': sie schneiden sich.

g) Wie zuvor: selben Richtungsvektor wie g (da parallel) und Aufpunkt Q:

$$h:\ \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt von h mit den Ebenen wie oben:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = -8$$

ergibt durch Ausmultiplizieren $15 + r \cdot 10 = -8$, also $r = -2{,}3$ und eingesetzt in g erhalten wir den Schittpunkt $S_{hE}(2{,}4|5{,}3|2{,}7)$. Und mit E' genauso nur hinten statt -8 eine -1, damit $r = -1{,}6$ und dann $S_{hE'}(3{,}8|4{,}6|3{,}4)$. Und zuletzt mit F:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 3$$

ergibt ausmultipliziert $13 + r \cdot 0 = 3$, eine unlösbare Gleichung, so dass h parallel zu F ist. Das war auch klar: F enthält g nach Konstruktion und h ist parallel zu g.